N.Korshunova (PhD student)[1]
Scientific advisor: *V.Zhikov* (Associate professor)[2]

[1] *Faculty of Physics and Mathemathics, Department of Pedagogical Education, 01.01.02, E-mail: korshunova.natali2012@yandex.ru*

[2] *Faculty of Physics and Mathemathics, Department of Pedagogical Education, E-mail:zhikov@vlsu.ru*

Keywords – diffusion with drift, the operator exponential, averaging, spectral method, the decomposition of the Bloch functions.

We study the Cauchy problem for the parabolic diffusion equation with a 1 -periodic coefficients containing the first-order. To construct the corresponding semigroup approximation in the operator L^2 $-$ norm on sections $t = const$ of the order $O\ \left(t^{-\frac{m}{2}}\right)$ when $t \to \infty, m = 1$ and $m = 2$. Used a spectral method based on the Bloch decomposition of the functions. These results are used in the averaging of the diffusion problem with ε-periodic coefficients when $\varepsilon \to 0$.

АППРОКСИМАЦИЯ ОПЕРАТОРНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДИФФУЗИИ СО СНОСОМ

Н.И Коршунова (аспирант)[1]
Научный руководитель: *В.В.Жиков* (д.ф.-м.наук., профессор)[2]

[1] *Физико-математический факультет, Кафедра математического анализа, специальность 01.01.02: E-mail: korshunova.natali2012@yandex.ru*
[2] *Физико-математический факультет, Кафедра математического анализа, E-mail: zhikov@vlsu.ru*

Рассмотрим задачу Коши в полупространстве $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x,t): x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$

$$Lu \equiv (\partial_t + A)u = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{n+1}, \qquad (1)$$
$$u|_{t=0} = f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

где

$$A = -\operatorname{div}(a(x)\nabla) + b(x)\cdot\nabla. \qquad (2)$$

Здесь $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$ – измеримая симметрическая матрица, заданная в $\mathbb{R}^n$, 1-периодическая по всем переменным $x_1, \dots, x_n$ $\left(\square = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^n - \text{ячейка периодичности}\right)$, подчиненная неравенству

$$v|\xi|^2 \le a(x)\xi\cdot\xi \le v^{-1}|\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, v > 0 \qquad (3)$$

$b(x)$ – вектор, 1 – периодический по переменным $x_1, \dots, x_n$, $b \in L^\infty(\square)$. Имеем периодическое уравнение диффузии во всем пространстве с неоднородными матрицей диффузии a и вектором сноса b.

Если $b \equiv 0$, то A является самосопряженным оператором в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Очевидно свойство неотрицательности $(Au,u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \ge 0$, поэтому без труда определяется сжимающая полугруппа $e^{-tA}, t > 0$.

В общем случае A несамопряжен, формально имеем (2)

$$A^* = \operatorname{div}(a\nabla + b). \qquad (4)$$

Тем не менее, замкнутый плотно определенный оператор A секториален в $L^2(\mathbb{R}^n)$, что служит заменой свойств самосопряженности и неотрицательности.

Как следствие, для него также существует полугруппа $e^{-tA}, t > 0$, при этом возможны различные подходы для ее определения. Таким образом, решение задачи (1) можно понимать в смысле полугруппы

$$u(\cdot,t) = e^{-tA}f(\cdot), \qquad t \ge 0. \qquad (5)$$

Ввиду периодичности коэффициентов оператора A, экспонента e^{-tA}, оказывается близкой в операторной L^2-норме при $t \to \infty$ к операторам с существенно более простой структурой. Для обоснования этой близости требуется дополнительная гладкость матрицы $a(x)$ и вектора $b(x)$.

Справедлива

Теорема 1. *Найдутся*

- *постоянная симметрическая матрица* $a^0 > 0$,
- *вектор* $\mu \in \mathbb{R}^n$,
- *1- периодическая ограниченная положительная функция p(x), нормированная условием*

$$\langle p\rangle = \int_\square p(x)dx = 1,$$

такие что

$$\|e^{-tA} - e^{-tA_0}p\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)} \le C_0 t^{-\frac{1}{2}}, \quad t \ge 1, \qquad (6)$$

где

$$A_0 = -\operatorname{div}(a^0\nabla) + \mu\cdot\nabla. \qquad (7)$$

Константа C_0 *зависит от размерности n, постоянной эллиптичности* v *из (3) и некоторых характеристик гладкости коэффициентов* a_{ij}, b_j.

Предельный оператор A_0 по своей структуре подобен оператору A, но имеет постоянные коэффициенты. Кроме того, A_0 аккретивен в $L^2(\mathbb{R}^n)$, т.е. $Re(Au,u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \ge 0$, так что полугруппа e^{-tA_0} очевидно определена. Согласно (6) оператор $e^{-tA_0}p$ является нулевым приближением к e^{-tA} с указанной погрешностью. Иначе говоря, решение задачи Коши

$$L_0u_0 \equiv (\partial_t + A_0)u_0 = 0 \text{ при } t \ge 0, \qquad (8)$$
$$u|_{t=0} = pf,$$

Приближает решение задачи (1) так, что

$$\|u(\cdot,t) - u_0(\cdot,t)\| \le C_0 t^{-\frac{1}{2}}, \; t \ge 1. \qquad (9)$$

Список использованных источников

[1] В. В.Жиков, “О спектральном методе в теории усреднения”, *Докл. РАН,* ***406,*** No. 5 (2006), 597 – 601.

[2] S.E. Pastukhova “ Estimates in homogenization of parabolic equations with locally periodic coefficients”, *Asymptotic Analysis*, **66,** No. 3,4, 207-228(2010